Devoir de synthèse n°3 Année Scolaire 2000 - 2001 2ème Année.

Exercice n° 1 :

On donne $f(x) = -(x-2)^2$ et $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$

1/Etudier f et g et tracer C_f et C_g dans un même repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

2/On pose $h(x) = -x^2 + 4x - 2$

a) Vérifier que $h(x) = f(x) + 2$ puis tracer C_h à partir de C_f et donner son tableau de variation.

b) On donne Δ la droite d'équation $y = x - 2$ Chercher les coordonnées des points d'intersection de C_f et Δ puis résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) - x + 2 \geq 0$.

3/ a) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_h.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \geq g(x)$.

4/ Soit la fonction k définie par :

$$\begin{cases} k(x) = g(x) \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ k(x) = h(x) \text{ si } x \in [0, 2] \\ k(x) = g(x) \text{ si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

a) Construire C_k puis donner son tableau des variations.

b) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs de m le nombre des solutions de l'équation $k(x)=m$

Exercice n° 2 :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne

$\mathscr{C}_m = \{M(x, y) ; x^2 + y^2 + (2m + 4)x + (2m - 2)y + 6m - 1 = 0\}$

1) a) Montrer que $\mathscr{C}_m$ est un cercle pour tout réel m dont-on précisera le centre I_m et le rayon R.

b)Montrer que I_m est un point de la droite $\mathcal{D}$: $x - y + 3 = 0$.

2) a) On pose m = 1 et $\mathscr{C}_1$ le cercle obtenu pour m =1. Donner les coordonnées du centre I_1et son rayon R_1.

b) On donne le point $A(-2, \sqrt{3})$. Vérifier que $A \in \mathscr{C}_1$ puis écrire une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}_1$ en A .

3) On donne la droite $\Delta_m : 3x - 4y + m - 1 = 0$.Déterminer m pour que Δ_m soit tangente à $\mathscr{C}_1$.

4) Soit B (1, -2) et h l'homothétie de centre B et de rapport $-\dfrac{3}{2}$. Ecrire une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}'_1 = h(\mathscr{C}_1)$.

Exercice n° 3 :

1) Soit $x \in [0,\pi]$ et $f(x) = 3\cos x - 4\cos x.\sin^2 x$.

a) Calculer $f(\frac{\pi}{3})$, $f(\frac{2\pi}{3})$ et $f(\frac{\pi}{2})$.

b) Montrer que $f(\pi - x) = -f(x)$.

c) Montrer que $f(x) = \cos x\,(4\cos^2 x - 1)$ puis résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.

2) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $2\sin^2 x + (\sqrt{3} - 2)\sin x - \sqrt{3} = 0$.

En déduire que pour tout $x \in [0, \Pi]$ $2\sin^2 x + (\sqrt{3} - 2)\sin x - \sqrt{3} \geq 0$.